a

Ułamki zwykłe

W temacie o dzieleniu poskromiliśmy swoją barbarzyńską naturę i pohamowaliśmy się przed rozłupywaniem kamienia na trzy mniejsze. Ponieważ mamy już więcej doświadczenia, możemy posunąć się do bardziej drastycznych kroków.

Łupanie, płatanie i rąbanie

Intuicje

Dotąd cały czas opieraliśmy się na liczbach naturalnych, które przedstawiają wielokrotności jednostki: 1, 2, 3, 4, … Gdy chcemy zjeść hot-doga, matematyka każe nam zjeść jednego hot-doga, dwa hot-dogi, trzy hot-dogi… Często jednak zmysł oszczędności lub brak miejsca w żołądku nakazuje nam nie zjadać od razu całego hot-doga. Możemy mieć ochotę jedynie na pół bułki z parówką i nikt na świecie nie zabroni nam zostawić drugiej połówki na później. Gdy kupujemy paczkę herbatników, nie musimy zjadać wszystkich pięciu od razu. Możemy zjeść dwa herbatniki z pięciu. Gdy babcia piecze tort, nie musimy zjadać całego od razu. Gdy minotaur w labiryncie dostaje dziecko, nie musi… to chyba zrozumiałe.

Istotę przedstawiania części całości oddaje ułamek zwykły. Jeśli Michaś dzieli tort czekoladowy na 8 kawałków, a następnie zjada 3 spośród nich, to mówimy, że zjadł tortu. Napis czytamy jako „trzy ósme” – mówi on tyle, że spośród ośmiu części całości wzięliśmy trzy części. Gdy bierzemy dwa herbatniki spośród pięciu w paczce, to zjadamy[[1]](#footnote-1) („dwie piąte”) paczki. Pół hot-doga to to samo, co („jedna druga”) hot-doga.

Nazewnictwo

Intuicje

Każdy ułamek zwykły składa się z następujących części: liczby u góry, poziomej kreski po środku i liczby na dole. Liczba u góry to *licznik ułamka*. Liczba na dole to *mianownik ułamka*. Pozioma kreska to *kreska ułamkowa.*

* W ułamku licznikiem jest 3, a mianownikiem 4.
* W ułamku licznikiem jest 123, a mianownikiem 67.
* W ułamku licznikiem jest 1, a mianownikiem 1.

Muszę pamiętać, by gdzieś wcisnąć porównywanie liczb.

Ułamek, w którym licznik jest mniejszy niż mianownik, to *ułamek właściwy*. Ułamki właściwe to np. , , . Pozostałe ułamki to *ułamki niewłaściwe* – np. , , . Ułamek z założenia ma przedstawiać część całości – dlatego „właściwie” ma licznik mniejszy niż mianownik.

Ułamek jako zapis dzielenia

Intuicje

Teraz możemy już w pełni okiełznać istotę dzielenia liczb naturalnych. Jeśli jedna liczba jest podzielna przez drugą, to nie mamy problemu i dostajemy w wyniku dzielenia pulchną i pachnącą liczbę naturalną. W przeciwnym razie do tej pory broniliśmy się, stosując resztę z dzielenia. Teraz mamy coś dużo odważniejszego – ułamki. Wróćmy do problemu podzielenia siedmiu kamieni na trzy równe grupy.

Aby dokonać tego podziału kompletnie, musimy położyć na każdą grupkę dwa kamienie, a jeden, który pozostał, rozłupać na trzy mniejsze i każdą z otrzymanych części rozłożyć na sterty.



Gdy rozłupujemy kamień na trzy części, dostajemy kawałki, z których każdy jest („jedną trzecią”) kamienia. Ostatecznie w wyniku dzielenia dostajemy dwa i jedną trzecią kamienia. Zapisujemy to tak:

to przykład *liczby mieszanej*, czyli takiej, która składa się z pełnej liczby oraz ułamka. Każdą liczbę mieszaną można przedstawić jako ich sumę:

Ponieważ rozłupywanie kamieni jest niezwykle wciągającym zajęciem, po krótkiej praktyce zaczynamy wyobrażać sobie każdy kamień jako rozłupany. Naszym oczom ukazuje się następujący obraz:







Jeden kamień to właściwie to samo, co trzy części spośród trzech części. W takim razie dwa kamienie to to samo, co sześć małych części kamienia. Gdy dołożymy do tego jeszcze jedną cząstkę, będziemy mieli 7 fragmentów. Dochodzimy do ciekawego wniosku:

Okazuje się, że znak dzielenia ( ) możemy bez skrupułów zastąpić kreską ułamkową. Postać jest dokładnie równoważna postaci . Tak samo:

Warto mieć na uwadze, że kreska ułamkowa jest zawsze równoważna znakowi dzielenia. Brnąc dalej w odmęty matematyki, szybko odzwyczaisz się od dwukropka na rzecz kreski ułamkowej.

Rozszerzanie ułamka

Intuicje

Weźmy ponownie tort czekoladowy babci. Michaś dzieli go na 8 równych kawałków – każdy z nich to tortu.

Spośród nich zjada trzy kawałki, czyli tortu.

Przy następnej okazji chęć odmiany skłania go do podzielenia tortu na 16 równych fragmentów. Bez pohamowania wsuwa 6 takich kawałków.

Ciężko oprzeć się wrażeniu, że w obydwu przypadkach Michaś zjadł dokładnie taką samą część tortu. Podzielił go na 2 razy więcej fragmentów, lecz jednocześnie zjadł 2 razy więcej kawałków. Z przyjemnością ogłaszamy, że

Analityczny cynizm skłania nas do podziału tortu na 24 fragmenty, czyli 3 razy więcej niż początkowo. Zaspokajając apetyt, Michaś zjada 3 razy więcej kawałków, czyli 9 sztuk.

Efekt nie jest zaskoczeniem – ponownie zjadł dokładnie taką samą część tortu.

Okazuje się, że ułamek możemy bezkarnie przekształcać w taki sposób, że licznik i mianownik mnożymy przez taką samą liczbę. Takie przekształcenie nazywa się rozszerzaniem ułamka. Rozszerzanie może działać też w drugą stronę. Wyobraźmy sobie, że świętując zaliczony sprawdzian z matematyki Michaś pozwala sobie na grzech zjedzenia 4 kawałków z 8.

Gdyby śmiałą ręką pokroić tort na 4 kawałki i zjeść spośród nich 2, efekt byłby ten sam.

Prawdy nie da się ukryć – Michaś bestialsko wszamał połowę tortu.

W ten sposób udało nam się wykonać uproszczenie:

Takie rozszerzanie ułamka, które w istocie doprowadza do prostszej postaci, nazywamy *skracaniem ułamka*. Skrócić ułamek możemy wtedy, gdy potrafimy znaleźć liczbę, przez którą można podzielić zarówno licznik, jak i mianownik – musimy więc znaleźć wspólny dzielnik licznika i mianownika (większy niż 1, bo dzielenie przez 1 nic nie zmienia). Jeśli nie potrafimy znaleźć takiej liczby – czyli NWD licznika i mianownika wynosi 1 – to ułamek jest w *postaci nieskracalnej*. Praktycznie postać nieskracalna jest najwygodniejsza do zabawy ułamkiem.

Dodawanie i odejmowanie ułamków

Intuicje

Ułamki to – bez uprzedzeń – też liczby, więc można na nich wykonywać działania. Możemy ułamki dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić[[2]](#footnote-2).

Dodawanie ułamków już wykonaliśmy potajemnie podczas rozłupywania kamieni na 3 części.

* Pojedynczy fragment to kamienia.
* Dwa fragmenty to kamienia.
* Trzy fragmenty to kamienia, czyli cały jeden kamień.

Gdy mianowniki dodawanych ułamków są takie same, nie mamy większych problemów – po prostu dodajemy ich liczniki.

* Michaś dzieli tort na 8 kawałków. Na obiad je 3 kawałki, a na deser 2 kawałki. Razem wchłonął 5 kawałków.

Ciekawie robi się wtedy, gdy ułamki mają różne mianowniki. Co zrobić, gdy dostaniemy do obliczenia ? Można usiąść i płakać albo przypomnieć sobie, że dowolny ułamek można rozszerzyć. Gdy licznik i mianownik ułamka pomnożymy przez 2, dostaniemy , a ułamki i potrafimy już dodać.

Zastosowany trik to *sprowadzenie do wspólnego mianownika*. Potrafimy już dodawać dowolne ułamki - jedyna trudność polega na tym, by odgadnąć, przez co należy pomnożyć licznik i mianownik. Nasz dylemat jest następujący: patrzymy na dwa mianowniki i zastanawiamy się, przez co pomnożyć jeden i przez co pomnożyć drugi, żeby otrzymać równe liczby. Ten problem to dokładnie poszukiwanie NWW dwóch liczb.

* Aby dodać , musimy znaleźć NWW liczb 12 i 18. Dostajemy

.

Prawdopodobnie lenistwo podsunie nam rozwiązanie bardziej brutalne niż szukanie NWW. Wystarczy przecież, że rozszerzymy pierwszy ułamek przez mianownik drugiego oraz drugi ułamek przez mianownik pierwszego.

Jedyna wada takiego rozwiązania jest taka, że pracujemy na większych liczbach, a wynik końcowy musimy jeszcze skrócić.

Odejmowanie ułamków jest w pełni analogiczne do dodawania. Gdy mianowniki są równe, odejmujemy liczniki. Gdy mianowniki są różne, wykonujemy sprowadzenie do wspólnego mianownika.

* Michaś dzieli tort na 8 kawałków i zjada spośród nich 5. Stwierdzając, że zjadł za dużo, zwraca światu dwa kawałki. W brzuchu pozostały mu 3 kawałki.

Mnożenie i dzielenie ułamków

Intuicje

Mnożenie to wielokrotne dodawanie – prawidłowość ta dotyczy także ułamków. Dodawanie do siebie pięciokrotnie ułamka daje wynik

czyli

Taki sam efekt osiągniemy, mnożąc przez 5 licznik ułamka .

* Pani Grażyna podzieliła marchewkę na 13 równych plasterków. Następnie 5 dni z rzędu jadła po 2 plasterki. W efekcie zgromadziła w żołądku 10 plasterków marchewki, czyli całej marchwi.

Aby pomnożyć ułamek przez liczbę naturalną, wystarczy pomnożyć jego licznik przez tę liczbę. To samo będzie dotyczyć dzielenia ułamka przez liczbę naturalną. Wiemy, że

Ponieważ dzielenie jest odwrotne do dodawania, to

W niektórych przypadkach dzielenie ułamka przez liczb naturalną sprowadza się do podzielenia licznika przez tę liczbę. Niestety nie zawsze wszystko idzie zgodnie z planem. Co mamy zrobić w takiej sytuacji:

?

Tu dzielenie liczby 10 przez 6 sprawia pewne trudności. Nie mniej wolno nam napisać, że

W tej chwili doznajemy olśnienia: znak dzielenia można przecież zastąpić kreską ułamkową. Nikt przecież nie zabroni stwierdzić, że:

Powstało nam pewne dziwactwo, które nazywamy *ułamkiem piętrowym.* Jest to ułamek, który zawiera w liczniku lub mianowniku inny ułamek. Jak pozbyć się takiego stworzenia? Możemy rozszerzyć cały ten ułamek przez 6.

Teraz powinno pójść z górki. Mnożyć ułamek przez 6 potrafimy:

W liczniku dostaliśmy ułamek , który możemy bezkarnie skrócić przez 6.

Dobra robota. Zużyliśmy pół strony na obliczenie, że

Jest to jednak bardzo przydatny wniosek. Jeśli dzielimy ułamek przez liczbę naturalną, możemy pomnożyć mianownik ułamka przez tę liczbę. I nie musimy przy tym babrać się z tworzeniem ułamków piętrowych. Metoda ta zawsze będzie słuszna.

* Eustachy zamierza zjeść parówkę. Ponieważ odczuwa fizyczny wstręt wobec zaokrąglonych końcówek parówki, odkrawa z obydwu stron , zostawiając parówki zdatnej do spożycia. Do posiłku przygotował sobie dwie kajzerki. Aby równomiernie rozłożyć spożycie parówki i bułki, na jedną kajzerkę musi przypadać parówki.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Niezdatna końcówka | | przypadające na pierwszą kajzerkę | | | | | | | | | przypadające na drugą kajzerkę | | | | | | | | | Niezdatna końcówka | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Skoro przetrwaliśmy mnożenie i dzielenie przez liczby naturalne, możemy zaryzykować mnożenie albo dzielenie dwóch ułamków. Co tak naprawdę oznacza mnożenie

?

Kreskę ułamkową zawsze można zastąpić znakiem dzielenia.

Ponieważ mnożenie jest łączne, możemy zapisać:

Z mnożeniem i dzieleniem przez liczby naturalne nie mamy już przecież problemu. To przez co mnożymy, wrzucamy do licznika, a to przez co dzielimy, wrzucamy do mianownika.

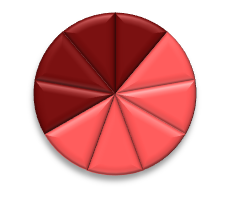
Jeśli kogoś nie przekonuje takie postępowanie, zawsze można spróbować starej metody:

Jakkolwiek by nie liczyć, zawsze dochodzimy do tego samego wniosku: aby pomnożyć dwa ułamki, mnożymy ich liczniki oraz ich mianowniki.

Warto mieć na uwadze, że mnożenie przez ułamek to w praktyce branie jakiejś części z liczby, przez którą mnożymy. możemy interpretować następująco: Na stole leży tortu.

Michaś dzieli te na trzy równe kawałki i bierze spośród nich 2.

Otrzymuje w wyniku całego tortu



Na koniec kwintesencja: spróbujmy podzielić przez siebie dwa ułamki:

Idąc za ciosem, wrzucamy dzielnik, czyli , do mianownika dzielnej, czyli .

Dostajemy wynik . Co ciekawe, metoda dzielenia ułamków sprowadziła się do pomnożenia licznika pierwszego przez mianownik drugiego oraz pomnożenia mianownika pierwszego przez licznik drugiego. Wynik

uzyskalibyśmy także, mnożąc

Zatem

Dzielenie ułamków zawsze możemy zastąpić mnożeniem – ułamek, przez który dzielimy, musimy „odwrócić”, czyli zamienić licznik z mianownikiem miejscami.

Gdy weźmiemy jakiś ułamek i zamienimy licznik z mianownikiem, to otrzymamy jego *odwrotność* lub inaczej *liczbę odwrotną*. Ciekawą własnością liczb odwrotnych jest to, że ich iloczyn zawsze wynosi 1.

* Liczba odwrotna do to .
* Liczbę 2 można przedstawić jako . W takim razie odwrotnością dwójki jest .
* 0 nie ma swojej odwrotności. Gdyby ta odwrotność istniała, miałaby postać , a niestety przez 0 dzielić nie można.

Nasze rozważania prowadzą do ogólniejszej reguły: dzielenie to mnożenie przez odwrotność.

* Aby podzielić , zamieniamy na odwrotność i mnożymy:
* Aby podzielić , bierzemy liczbę odwrotną do 4 i mnożymy:
* Aby podzielić , zamieniamy 2 na , liczbę 3 odwracamy i mnożymy:

Zaszliśmy naprawdę daleko. Możemy brać części, części z częściami i części z części.

* Al Habib kroczy przez pustynię z pełnym bukłakiem wody. Pierwszego dnia wypił zawartości butelki, więc zostało zawartości. Drugiego dnia słońce przypiekło mocniej, więc Al Habib wypił aż połowę butelki, pozostawiając jedynie butelki. Targany wyrzutami sumienia trzeciego dnia wypił ledwie tego, co zostało, czyli butelki. Na czwarty dzień pozostało mu butelki. Trzymamy kciuki.
* Michaś zmartwiony myślą, że tort czekoladowy tak szybko znika, postanowił obrać taką taktykę: każdego dnia zje tego, co zostało. Pierwszego dnia zjadł tortu, więc zostało tortu. Następnego dnia zjadł , czyli tortu. Zostało . Trzeciego dnia ubyło , więc zostało . Kolejnego dnia porcja wyniosła , czyli pozostało placka. Piątego dnia Michaś zbuntował się przeciw samozniewoleniu i zjadł całą resztę.
* Szóstego dnia Michaś zaopatrzył się w 30 tabletek na odchudzanie. Recepta mówi, że należy zażywać pół tabletki trzy razy dziennie. W ciągu tygodnia Michaś skonsumował więc tabletki. W takim razie zostało mu tabletki. Zaczął zastanawiać się, na ile dni wystarczy mu takiego zapasu. Skoro w ciągu dnia bierze tabletki, to tabletek wystarczy na dni.

Porównywanie ułamków

Intuicje

Podobnie jak liczby naturalne, możemy porównywać też ułamki. Nietrudno orzec, że po zjedzeniu 3 z ośmiu kawałów tortu Michaś będzie bardziej wysycony, niż po zjedzeniu jednego kawałka. Porównanie ułamków o równych mianownikach sprowadza się do porównania ich liczników. Gdy mianowniki są różne – znamy już sposób – po prostu sprowadzamy obydwa ułamki do wspólnego mianownika.

* , bo
* , bo

Czasem jednak sprowadzenie do wspólnego mianownika sprawia pewne trudności, wtedy możemy chwycić się innej metody. Chcemy porównać ułamki i . Gdy podzielimy tort na 7 kawałków, każdy z nich będzie mniejszy, niż gdybyśmy podzielili tort na 5 kawałków. W pierwszej sytuacji bierzemy 2 stosunkowo małe kawałki tortu, a w drugiej sytuacji 2 nieco większe kawałki. W takim razie .

Gdy liczniki dwóch ułamków są równe, większy jest ten ułamek, który ma mniejszy mianownik.

* licząc pierwszą metodą: , ponieważ
* , ponieważ

Ułamki piętrowe

Rozszerzenie

Piętrowość ułamków możemy rozbudowywać do dowolnie dużych rozmiarów. Zwykle jednak taka forma jest mało przejrzysta, a przez to mało praktyczna. Niestaranny zapis ułamka piętrowego może prowadzić do niejednoznaczności. Zapis

|  |
| --- |
| 2 |
| 3 |
| 5 |

można interpretować na dwa sposoby:

* Jest to ułamek, którego licznikiem jest , a mianownikiem 5. Jego wartość jest równa .
* Jest to ułamek, którego licznikiem jest 2, a mianownikiem . Jego wartość jest równa .

Z tego powodu wyróżnia się *kreskę główną* ułamka piętrowego. Pozwala ona jednoznacznie rozróżnić licznik od mianownika – jest ona dłuższa od pozostałych kresek ułamka.

Dzięki takiemu zapisowi wiadomo, że jest licznikiem, a 5 mianownikiem. Aby pozycja kreski głównej była jeszcze wyraźniej widoczna, zawsze w równościach ułamek piętrowy zapisujemy tak, aby kreska główna była na wysokości znaku . Piszemy więc

Nie zaś

Rozważam dodanie rozszerzenia o ułamkach łańcuchowych

1. Właściwie… nie przypominam sobie wspólnego konsumowania herbatników. [↑](#footnote-ref-1)
2. A co, myślałeś że zabawy z działaniami się skończyły? [↑](#footnote-ref-2)